Harmadik témakörünk az egyenletek megoldási módszereiről szól

Figyelmesen olvassátok végig a rövid összefoglalót, majd a kidolgozott feladatokat értelmezzétek!

Az ellenőrző feladatokat oldjátok meg, ellenőrizzétek le a kapott megoldásokat és március 16-áig adjátok le Nagyné Koncz Terézia tanárnőnek.

Egyenletek megoldási módszerei :

1. **Grafikus módszer: Az f(x)=g(x)** egyenlet két oldalán szereplő függvényt ábrázoljuk koordináta-rendszerben és meghatározzuk a két grafikon közös pontjait. A közös pontok első koordinátái adják az egyenlet megoldásait.

2. **Az egyenlet értelmezési tartományának vizsgálata**: Érdemes megadni azt a legbővebb halmazt, amelyen az egyenlet értelmezhető, mert ezzel egyszerűsödhet a megoldás.

3. **Az egyenletben szereplő kifejezések, függvények értékkészletének vizsgálata**: Az értékkészlet vizsgálatával kiderülhet, hogy az egyenletnek nem lehet megoldása vagy csak néhány érték jöhet számításba.

4. **Az egyenlet rendezése, mérlegelv alkalmazása**: - Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk, illetve kivonhatjuk ugyanazt a számot, ismeretlent tartalmazó kifejezést. - Az egyenlet mindkét oldalát szorozhatjuk, illetve oszthatjuk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel. Ha olyan ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorzunk, amely 0 is lehet, akkor hamis gyököt kaphatunk. Ha pedig olyan kifejezéssel osztunk, amely 0 is lehet, akkor elveszíthetjük az egyenlet valamely gyökét, esetleg több gyökét is.

5. **Szorzattá alakítás**: Az ()=0 alakú egyenlet bal oldalát tényezőkre bontjuk. Egy szorzat csak akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0. Ennek az elvnek a felhasználásával az eredeti egyenlet megoldását néhány alacsonyabb fokú, egyszerűbb egyenlet megoldására vezetjük vissza.

6. **Új ismeretlen bevezetése**: Összetett kifejezéseket tartalmazó egyenletek, egyenletrendszerek gyakran egyszerűbb alakra hozhatók, ha egy részletet új ismeretlennel jelölünk. Így könnyebben megoldható egyenleteket kaphatunk. Az új ismeretlen értékének meghatározása után megadjuk az eredeti ismeretlen értékét.

> megoldásokat az eredeti egyenletbe, egyenletekbe behelyettesítjük. Az egyenlet bal és jobb oldalának az értékét kiszámoljuk. Ha ezek megegyeznek és mind az alaphalmaznak, mind az értelmezési tartománynak eleme a kapott érték, akkor megoldásunk helyes.

Kidolgozott példák:

1. **Grafikus módszer: Az f(x)=g(x)**

Oldjuk meg az egyenleteket grafikusan!

a.) 3x-7=8-2x

b.) $(x-5)^2-2=-|x-9|+4$

Megoldás: a) Az f(x)=3x−7 és g(x)=8−2x függvényeket ábrázoljuk. A függvények képe egy-egy egyenes .

A grafikonok közös pontja a (3;2) pont, így az egyenlet megoldása x =3.Végezzünk ellenőrzést!

b) A bal oldalon ábrázoljuk a másodfokú függvényt, melynek grafikonja parabola. A jobb oldalon az abszolútérték függvényt kapjuk. A két metszéspont (4; -1) és (7;2) , így a megoldás: x=4; x=7.

2. Az egyenlet értelmezési tartományának vizsgálata:

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán

a.) $\sqrt{2x-14}=\sqrt{21-3x}$

b.) $\sqrt{5x-14}=\sqrt{6-3x}$

c.) $\frac{x}{x-6}=\frac{6}{x-6}$

d.) $\frac{\sqrt{3x-12}}{4-x}=\sqrt{8-2x}$

e.) $x+\frac{1}{x-1995}=1995+\frac{1}{x-1995}$

f.) $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}=x-4$

Megoldás:

a) Négyzetgyökös kifejezés csak nemnegatív számra értelmezhető, ezért az egyenlet értelmezési tartományának elemeire a $2x-14\geq0$ és $21-3x\geq0$ feltételnek teljesülnie kell, azaz $x\geq7$ és $x\leq7$. Így $x=7$ esetén van értelmezve, ez az érték behelyettesítéssel ellenőrizhető, az egyenletnek valóban megoldása.

b) A négyzetgyök értelmezése miatt $5x-14\geq 0$ és $6-3x\geq0$.Azaz $x\geq\frac{14}{5}$ és $2\geq x$ Nincs olyan valós szám, amelyre mindkét feltétel teljesül, így az egyenletnek nincs megoldása.

c) A nevezőben nem lehet 0, ezért $x\neq6$. A két tört nevezője azonos, ezért egyenlőség esetén csak $x=6$ állhatna fenn, de ez az értelmezési tartomány miatt nem lehetséges, így az egyenletnek nincs megoldása.

d) A négyzetgyökök értelmezése miatt $x\geq4$ és $x\leq4$, a tört nevezője miatt $x\neq4$. Tehát nincs megoldása az egyenletnek.

e.) A tört nevezője nem lehet nulla, ezért $x\neq1995$, de az egyenlet mindkét oldalából ha elvesszük az $\frac{1}{x-1995}$ törtet, akkor $x=1995$ et kapunk. Ami nem megoldása az egyenletnek.

f.) Négyzetgyökös kifejezés csak nemnegatív számra értelmezhető, ezért az egyenlet értelmezési tartományának elemeire a $x-2\geq0$ és $3-x\geq0$ feltételnek teljesülnie kell, azaz $x\geq2$ és $x\leq3$. Az egyenlet jobboldalán $x-4$ is nemnegatív, mert két nemnegatív szám összegéről van szó. Így $x\geq4$ miatt nincs megoldása az egyenletnek.

3.Az egyenletben szereplő kifejezések, függvények értékkészletének vizsgálata

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x+5)^2+\sqrt{x-3}=0$

b.) $(2x-5)^2+|y-8|=0$

c.) $2x^2+6x+4y^2+4xy+9=0$

d.) $x^2+y^2=2x+2y-2$

Megoldás:

a) Egy szám négyzete, egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív, ezért az egyenlet bal oldalának mindkét tagja nemnegatív. Az összeg csak akkor lehet nulla, ha mindkét tag nulla, azaz $(x+5)^2=0$, amiből $x=-5$ és a $\sqrt{x-3}=0$ amiből $x=3$ feltételnek egyszerre kellene teljesülnie, ami lehetetlen. Ez alapján az egyenletnek nincs megoldása.

b) A szám négyzetének és abszolútértékének egyszerre kell nullának lennie, tehát $(2x-5)^2=0$ és $|y-8|=0$, amiből $x=2{,}5$ és $y=8$.

c) Az egyenletet átalakítva $(x+3)^2+(2y+x)^2=0$ alakra hozva, láthatjuk, hogy az összeg csak akkor lehet egyenlő nullával, ha $(x+3)=0$ és $(2y+x)=0$ így $x=-3$ és $y=-1{,}5$ esetén teljesül.

d.) Az egyenletet rendezzük nullára, $x^2+y^2-2x-2y+2=0$ és a tagokat csoportosítsuk $x^2-2x+1+y^2-2y+1=0$, fedezzük fel a nevezetes azonosságokat az egyenlet baloldalán! $(x-1)^2+(y-1)^2=0$ Így a c.) feladathoz hasonlóan $x-1=0$ és $y-1=0$ teljesül, vagyis $x=1$ és $y=1$ a megoldások.

Szorzattá alakítás:

a.) (3x+6)(x-7)(12-6x)=0
b.) 2x(x+4)-5(x+4)=0
c.) x^2-6x+3x-18=0
d.) x^2-8x+15=0
e.) x^6-4x^5-21x^4=0
f.) (x+15)(x+2)+(6-2x)(x+2)=6x(x+2)
g.) (x+2)$\sqrt{x-1}$=0

Megoldások:

a.) Egy szorzatot láthatunk az egyenlet baloldalán, a jobboldalon nulla áll, amiből vagy 3x+6=0 vagy x−7=0 vagy 12−6x=0. Az egyenlet megoldásai: x=−2 ;x=7; x=2.
b) Az egyenletet kiemeléssel szorzattá alakítjuk: (2x−5)(x+4)=0, ebből a szorzat alakból x=2,5 vagy x=−4.
c) Az első két tagból emeljünk ki az x-et , az utolsó két tagból emeljünk ki 3-at : x(x-6)+3(x-6). A Két tagból a közös tényezőket kiemeljük (x+3)(x−6)=0, tehát a megoldások x=−3;x=6.
d) A másodfokú kifejezést két elsőfokú tényező szorzatára szeretnénk bontani. Ha ez lehetséges, a akkor a konstans tagok szorzata 15. Az egész számok között találunk megfelelő értékeket: 3 és 5 , ezért a 8x-et két részre bontjuk: x−3x−5x+15=x(x−3)−5(x−3)=(x−3)(x−5)=0 Az egyenletet szorzattá alakítottuk, a megoldások x=3 ;x=5. Természetesen ennek az egyenletnek a gyökeit a másodfokú egyenlet megoldó képletével is megkaphatjuk.
e.)Kiemelünk a tagokból x-t: x^4(x^2−4x−21)=0. A szorzat tényezői nulla lehet. Innen x=0 vagy x^2−4x−21=0. Az utóbbi másodfokú egyenletet elsőfokú tényezőkre bontjuk (x-7)(x+3)=0, amiből x=−3 vagy x=7 .Vagyis három megoldásunk lett, ellenőrzéssel győződjünk meg a gyökök helyességéről: ha x=0
x^6-4x^5-21x^4= 0^6-4×0^5-21×0^4=0

ha x=-3,akkor $(-3)^6$-4×$(-3)^5$-21×$(-3)^4$=729-4×(-243)-21×81=0

ha x=7, akkor 7^6-4×7^5-21×7^4=117649-4×16807-21×2401=0

f.) Ha az egyenletet egy oldalra rendezzük és (x+2)-t kiemelünk: (x+2)(x+15+6−2x−6x)=0 azaz (x+2)(−7x+21)=0 egyenletet kapjuk. Amiből (x+2)=0 vagy (-7x+21)=0 Ennek az egyenletnek a gyökei: x=−2 és x=3.
g.)A szorzat egyik tényezője x+2=0, amiből x=-2 a megoldás. A másik tényező $\sqrt{x-1}=0$, amiből x=1a másik megoldás. Behelyettesítéssel ellenőrizzük le a megoldás!

4. Az egyenletek megoldása mérlegelv segítségével:

a.) $\frac{8y-5}{2y+5}$=5-$\frac{3y+7}{3y+2}$
b.)$\frac{x+1}{x-1}$-$\frac{x+2}{x+3}$+$\frac{1}{x^2+2x-3}=0$

a.)Értelmezési tartomány: Egy tört nevezője nem lehet nulla, ezért y≠−2,5 ,y≠$-\frac{2}{3}$; y∈ℝ. Az egyenletet a közös nevezővel szorozzuk: (8y−5)(3y+2)=5(2y+5)(3y+2)−(3y+7)(2y+5) Bontsuk fel a zárójeleket: 24y^2 −15y+16y−10= 30y^2+75y+20y+50−6y^2−14y−15y−35
y−10= 66y+15
65y= −25
y= $-\frac{25}{65}$=$-\frac{5}{13}$
Végezzük el az ellenőrzést!

b.) A harmadik tört nevezőjét alakítsuk szorzattá! (x-1)(x+3) alakba írható. A törtek nevezője nem lehet nulla. Így az egyenletben szereplő törtek $x\neq1$és $x\neq-3$; $x\in\mathbb{R}$ esetén értelmezhetőek. A közös nevezővel, $(x-1)(x+3)$-mal beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát: $(x+1)(x+3)-(x+2)(x-1)+1= 0$ egyenletet kapjuk, majd felbontjuk a zárójeleket:

$x^2+4x+3-x^2-x+2+1= 0$, összevonás következik.

$3x+6= 0$

$3x= -6$

$x= -2$ az egyenlet megoldása. Végezzük el az ellenőrzést!

Ellenőrző feladatok:

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán, ellenőrizzük le a gyököket! A feladatokat március 16.-ig várom

1.) $\frac{x^2-1}{x^3-1} = 0$

2.) $x^2(x+3)=4(x-1)(x+3)$

3.) $(x-5)^4+(3x-y+3)^2=0$

4.) $(x+5)(x-2) - (x+3)^2=7-x$

5.) $(3x+1)(2x-5)-x(2x-5)=(x-7)(2x-5)$

6.) $\sqrt{x-5}+\sqrt{4-x}=2$

7.) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+9}= - 4$

8.) $x^3-x-3x^2+3=0$

9.) $\frac{\sqrt{15-6x}}{2x-5}=\sqrt{4x-10}$

10.) $(x+1)(2x-3)x-(3x+2)x(x+1)=(x+1)x$

11.) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$

12.) $x^2-6x+9+y^4+2x^2y^2+x^4=0$

13.) $(x-3)^2(x-5)-(6-x)(11x-1)=x(x+2)(x-2)+9$

14.) $|x+y-3|+9x^2-6x+1=0$

15.) $4y^2+20y=0$

Jó munkát kívánok!

Nagyné Koncz Terézia