Kedves 9. osztályos Tanulók!

A Diákakadémia első témaköréhez tartozó feladatokat olvashatjátok.

Figyelmesen tanulmányozzátok a minta feladatokat és megoldásokat, vagy találjatok ki önállóan új megoldásokat a feladatokhoz. Az ellenőrző kérdéseket oldjátok meg, és a megoldásokat fényképezzétek le, küldjétek el az e-mail címemre (koncz1102@gmail.com), vagy személyesen adjátok át Nagyné Koncz Terézia tanárnő részére.

A megoldásokon legyen rajta a nevetek, osztályotok és egy választott jelige. Az eredményeteket a Bajza honlapján láthatjátok a jeligével. Jó munkát kívánok!

1.) **Páros vagy páratlan az első száz prímszám összege?**
Prímszámoknak nevezzük azokat a természetes egyész számokat, amelyeknek pontosan két osztója van az 1 és önmaguk. A legkisebb prímszámunk a 2, aki páros szám. A többi prímszámunk csak páratlan szám lehet: 3,5,7,11,13,17,19,23,29,31, …stb. végtelensok prímszám létezik. Ha páros számokat adunk össze, akkor mindig páros számot kapunk. Ha egy páros számhoz adunk egy páratlan számot, akkor páratlan számot kapunk. Ha két páratlan számot adunk össze, akkor páros számot kapunk. A feladatban egy páros számhoz adunk 99 db páratlan számot, ekkor páratlan számot kapunk eredményként.
Tehát az első száz prímszám összege páratlan lesz.

2.) **Adjunk meg két pozitív egész számot, melyek összege is és szorzata is prím!**
A prímszámokat csak egyféleképpen lehet szorzattá bontani, amelyben az egyik tényező az 1 a másik pedig x , maga a prímszám. Például a 13=1×13. Tehát az egyik szám az 1 lesz. Mivel az összegük is prímszám, ezért 1+X=prímszámból következik, hogy két szomszédos egész számról van szó vagyis az 1 és a 2 a helyes megoldás.

3.) **Adjunk meg két olyan prímszámot, melyek összege is és különbsége is prím!**
Vizsgáljuk meg , ha két páros számot összeadunk, akkor páros számot kapunk, és ha kivonjuk ezeket akkor is páros számot kapunk. pl 10+4=14 és 10-4=6. Ha két páratlan számot összeadunk és kivonunk ugyanúgy páros számot kapunk. Pl. 13+5=18 és 13-5=8 Tehát olyan prímszámokat keresünk, amelyek egyike páros, a másik pedig páratlan, mert ezek összege és különbsége lesz páratlan (a prímszámok egy kivételével páratlan számok). Tehát az egyik keresett prímszám csak a 2 lehet, a másik prím legyen az x. Ekkor 2+x, x,x-2 három prímszám, amelyek közül az egyik 3-mal osztható, de ez a szám csak 3 lehet. Ez a három szám 3,5,7, amiből az x=5. A keresett két prímszám a 2 és az 5.

4.) **Van-e olyan p prímszám, hogy p+15 is prímszám?**
Igen van. A p=2 lesz a megoldás, mert 2+15=17. Ha két páros számot összeadunk, akkor páros számot kapunk, de nekünk csak páratlan szám lehet az összeg, mert a prímek zöme páratlan. Így p-nek páros prímnek kell lennie, ami csak a 2 lehet.

5.) **Milyen számjegyre végződik az első 19 pozitív egész szám szorzata?**
A szorzat 1×2×3×4×5…×18×19=csoportosítsuk a szorzat tényezőit =2×5×10×….×18×19=100×…×18×19=Ha 100-zal szorzunk valamit, akkor a szorzat két nullára fog végződni. Válaszunk: a szorzat nullára fog végződni.

6.) **Hány darab nullára fog végződni az első 30 pozitív egész szám szorzata? (1×2×3×4×5×…×29×30)**
Az 5. feladat alapján keressük meg azokat a számokat, amelyeket ha összeszorzunk nullára fognak végződni. Ezek a számok a 2×5, 10, 4×15,20, 6×25, 30 vagyis az öttel osztható számok kellenek, mert őket egy páros számmal szorozva 10-zel osztható számot kapunk, ami 0-ra végződik. Vigyázni kell a 25-tel, mert ha két páros számmal szorozzuk, akkor két nullára

végződik a szorzat. Tehát a felsorolt számokat, számpárokat összeszorozzuk és kiderül, hogy 7 db nullára fog végződni az első 31 pozitív egész szám szorzata.

7.) Milyen számjegyet írhatunk az x helyére, ha tudjuk, hogy a 123467x hétjegyű szám

a.) osztható 5-tel?

Az öttel osztható számok utolsó számjegye 0 vagy 5 lehet. Így az x értéke vagy 0 vagy 5.

b.) osztható 4-gyel?

Azok a számok oszthatók 4-gyel, amelyeknek az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel. A vizsgált kétjegyűszám 7x. Az x helyére írhatunk 2-t vagy 6-t, mert 72:4=18 tehát a 1234672:4=308668 illetve 76:4=19 vagyis 1234676:4= 308669 A keresett x értéke 2 vagy 6 lehet.

c.) osztható 3-mal?

Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyek számjegyeinek összege osztható 3-mal. A számjegyek összege:1+2+3+4+6+7+x=23+x, ebből az x=1 vagy 4 vagy 7 lehet. Ha x=1, akkor 23+1=24 a 24:3=8, ekkor a keresett hétjegyű szám 1234671, ami tényleg osztható 3-mal. Ha x=4, akkor 23+4=27 , a 27:3=9, ekkor a keresett szám 1234674. Ha az x=7, akkor 23+7=30 30:3=10, ekkor a keresett szám 1234677.

d.) osztható 8-cal?

Azok a számok oszthatók 8-cal, amelyeknek az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható nyolccal. Vagyis 123467x számból a 67x kell megvizsgálni. Próbálkozzunk a páros számokkal és gondoljunk arra is, hogyha nyolccal osztható egy szám, akkor néggyel is osztható. A helyes megoldás x=2.

8.) Igazoljuk, hogy $9 \mid 10^{33} + 8$ (jelölés értelmezése=9 osztója a $10^{33}+8$ számnak)

Megoldások: A 9-es oszthatósági szabály alapján a bizonyítás a következő: Mivel 10^{33} számjegyeinek összege 1 (hiszen egy darab egyesen kívül csak nullákat tartalmaz), ha hozzáadunk 8-at, akkor a számjegyek összege 9 lesz. A 9-es oszthatósági szabály szerint a szám osztható 9-cel. Egy másik bizonyítási módszer a maradékok vizsgálata. Ehhez két fontos tételt kell ismernie a diákoknak. Az egyik azt mondja ki, hogy egy összeg maradéka adott számmal osztva megegyezik a maradékok összegével. A másik tétel állítása pedig, hogy egy szorzat maradéka megegyezik a tényezők maradékai szorzatának maradékával bármilyen oszthatóság esetében. $9 \mid 10^{33}+8$-at kell bizonyítanunk. 10 maradéka 9-cel osztva 1, így 10^{33} maradéka 1^{33} lesz 9-cel osztva a szorzat maradékára vonatkozó tétel alapján, míg a 8 maradéka önmaga. Alkalmazva az összeg maradékára vonatkozó tételt megkapjuk, hogy a maradék 9, azaz 0, tehát a kifejezés osztható 9-cel.

9.) Melyik az a legkisebb természetes szám mely osztható az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok mindegyikével?

Megoldás: Ahhoz, hogy minden szám ossza a felsoroltak közül, az előforduló számok prímfelosztásában szereplő prímeket a maximális hatványon kell venni. Ezek szorzata adja meg a keresett számot. 10-ig csak a 2, 3, 5 és 7 prímszámok fordulnak elő. Ezek legmagasabb hatványon a 8, 9, 5 és 7 számokban fordulnak elő, tehát $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ a legkisebb ilyen szám, ha a természetes számokat, mint a pozitív egészeket tekintjük. Ha a természetes számokat 0-val kezdjük, akkor a 0 a megoldás, hiszen az minden más számmal osztható.

10.) Miért nem négyzetszám a

a.) 100!+7(A „!” faktoriális szorzat azt jelenti , hogy a pozitív egész számokat összeszoroztuk 1-től 100-ig)

b.) 1!+2!+3!+….+100!

c.) $3+3^2+3^3+\ldots+3^{100}$

d.) $10^{10}+5$

e.) $11^7+11^6+11^5+11^4+11^3+11^2+11+1$

f.) abab alakú négyjegyű szám

g.) Az 1,2,3,4,5,6 számjegyek valamilyen sorrendjében felírt hatjegyű szám?

Az indoklásokhoz használjuk fel, hogy egy szám nem lehet négyzetszám, ha

-utolsó számjegye 2,3,7,8 (I.) vagy
-osztható 3-mal, de 9-cel nem (II.) vagy
-3-mal osztva 2 maradékot ad (III.) vagy
-4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot ad (IV.) vagy
-két szomszédos négyzetszám között van (V.)

Most néhány egyszerű kérdés következik:

12.) Páros vagy páratlan az első száz prímszám összege? Válaszát indokolja!

13.) Adjunk meg két egész számot, melyek összege is és szorzata is prím!

14.) Adjunk meg két olyan prímszámot, melyek összege is és különbsége is prím!

15.) Oldjuk meg az egyenleteket a prímszámok halmazán

a.) $2x+3y+6z=78$

b.) $x^2-2y^2=1$

A megoldásokhoz használjuk fel a prímszámok fogalmát, és vizsgáljuk a számok paritását(páros vagy páratlan)!

17.) Bizonyítsuk be a következő oszthatóságokat!

a.) $5\,|\,11^9+11^8+11^7+11^6+11^5+11^4+11^3+11^2+11+1$

b.) $100\,|\,11^{10}-1$

c.) $200\,|\,199^3-199$

d.) $13\,|\,2^{70}+3^{70}$

e.) $18\,|\,17^{19}+19^{17}$

Megoldások a.) Vizsgáljuk meg a 11 hatványértékeinek végződését és azok összegét!

b.) és c.) feladatoknál alakítsuk át a különbségeket szorzattá és a szorzat tényezőit vizsgáljuk oszthatóság szempontjából!

A d.) és e.) feladatban a nevezetes azonosságokat használjuk $a-b\,|\,a^n-b^n$ és $a+b\,|\,a^{2n}-b^{2n}$ valamint $a+b\,|\,a^{2n+1}+b^{2n+1}$

d.) megoldása: $13=2^2+3^2\,|\,(2^2)^{35}+(3^2)^{35}=2^{70}+3^{70}$

Az e.) $18\,|\,17^{19}+1^{19}$ és $18\,|\,19^{17}-1^{17}$ vagyis $18\,|\,(17^{19}+1^{19})+(19^{17}-1^{17})=17^{19}+19^{17}$

oszthatóság és skatulyaelv alapján megoldható:

18.) Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható 10-zel!

Megoldás

Nézzük a négyzetszámok 10-zel vett maradékát, azaz az utolsó számjegyét.

n 10-es maradéka 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

n^2 10-es maradéka 0 1 4 9 6 5 6 9 4 1, látható, hogy a négyzetszámok 10-zel osztva csak a következő maradékok valamelyikét adhatják: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Ez 6 különböző lehetőség, azaz a maradékok alapján skatulyákba sorolhatjuk a négyzetszámokat. Mivel összesen hét négyzetszámunk van, és mindegyiket be kell raknunk a 6 skatulya valamelyikébe, így biztosan lesz olyan skatulya, amiben 2 szám szerepel. Ezek különbsége viszont osztható lesz 10-zel. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

19.) Az a és b számjegyek, az „a" nemegyenlő 0-val. Mutassuk meg, hogy az ababab alakú hatjegyű tízes számrendszerbeli számok mind oszthatók 777-tel!

. Megoldás

A jelölés a következőképpen oldható fel: ababab = 100000a+10000b+1000a+100b+10a+b = 101010a+10101b=(10a+b)·10101.

A 10101 prímtényezős felbontása=3·7·13·37, a 777 törzstényezős felbontása 3·7·37. Eszerint 777|10101, tehát 777|(10a+b)·10101, azaz 777|ababab.

20.) A 26·93 szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a 62·39 szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével, 26·93 = 62·39. Mi a „titka" ezeknek a számoknak? Keress más ilyen szorzatokat!

6KMBK XXXIII. Kalmár László versenye, 2004,

Megoldás:

$$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39\ Általánosan\ felírva: ab \cdot cd = ba \cdot dc. Ezt\ kifejtve\ azt\ kapjuk, hogy$$

(10a+b)·(10c+d) = (10b+a)·(10d+c)

100ac+10bc+10ad+bd = 100bd+10ad+10bc+ac

99ac = 99bd

ac = bd

Tehát a fenti szorzatban szereplő számok „titka" az, hogy a tízesek helyén álló számok szorzata(2·9) megegyezik az egyesek helyén álló számok szorzatával (6·3). Vagyis minden olyan ab és cd számpárra, melyekre igaz, hogy ac = bd, teljesül, hogy ab·cd = ba·dc. További ilyen számpárok: 32·46(= 23·64); 21·36(= 12·63); stb.

21.) Adjuk meg mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre x+xy=11

Megoldáshoz alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát: x(1+y)=11 Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 1+y .(hiszen 1+y nem lehet nulla) Így x=$\frac{11}{1+y}$. Mivel x egész szám, ezért a jobb oldalon is egész számnak kell lenni, vagyis 1+y osztója 11-nek. Az 1+y lehet 11, -11,1, -1, ebből az y=10, -12, 0. -2

22.) Melyek azok az x egész számok, amelyekre az $\frac{x+3}{x-3}$ tört értéke is egész szám?

Megoldás, végezzük el a következő átalalkítást:$\frac{x+3}{x-3}$**=**$\frac{x-3+6}{n-3}$**=1+**$\frac{6}{x-3}$ A tört rész akkor lesz egész, ha x-3 osztója 6-nak, azaz x-3= -6, -3, -2, -1 , 1, 2, 3, 6 . Tehát az x=-3,0, 1, 2, 4, 5, 6 ,9 lehet

23.) Melyek azok az n természetes számok, amelyekre az $\frac{4n+3}{n-3}$ tört értéke is természetes szám?

Megoldás, végezzük el a következő átalakítást: $\frac{4n+3}{n-3}=\frac{4(n-3)+15}{n-3}=4+\frac{15}{n-3}$ A tört értéke akkor lesz természetes szám , ha n-3 osztója a 15-nek, azaz n-3= 1,3,5,15 A keresett értékek n=4,6,8 ,18

Ellenőrző kérdések az első témakörhöz

Kedves 9. osztályos tanulók a következő feladatokat kell megoldani november 24.-ig. A megoldásokat részletesen kidolgozva, A4 lapon névvel, iskolával, jeligével küldjétek el az alábbi e-mail címre:**koncz1102@gmail.com** Vagy személyesen adjátok át Nagyné Koncz Terézia tanárnőnek.

1. Határozzuk meg azokat a x,y,z különböző prímszámokat, amelyekre x+y+z=30.
2. Van e olyan p prímszám, hogy p+19 is prímszám lesz? Válaszodat indokold!
3. Van e olyan k prímszám, hogy k+15 is prímszám lesz? Válaszodat indokold!
4. Három testvér közül a legidősebb 14 évvel idősebb a legfiatalabbnál, a középső testvér pedig 4 évvel fiatalabb a legidősebbnél. Mindhármuk életkora prímszám. Hány évesek?
5. Milyen számjegyre végződik az első 39 pozitív egész szám szorzata?
6. Hány darab nullára fog végződni az első 50 pozitív egész szám szorzata? (1×2×3×4×5×…×49×50)
7. Milyen számjegyet írhatunk az x helyére, ha tudjuk, hogy a 937461x hétjegyű szám
   a.) osztható 2-vel?
   b.) osztható 3-mal?
   c.) osztható 9-cel?
   d.) osztható 5-tel?
   e.) osztható 10-zel?
   f.) osztható 4-gyel?
   g.) osztható 8-cal?
8. Igazoljuk a következő oszthatóságot : $6|10^{10}+8$(6 osztója 10000000008 nak)
9. Mutassuk meg, hogy ha egy tetszőleges háromjegyű számot a szám után újra leírunk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 13-mal.
10. Milyen n egész számok esetén lesz a tört is egész szám: $\frac{n+11}{n-9}$
11. Miért nem lehet két prímszám összege 1991?
12. Három prímszám összege 1992. E három prímszám közül melyik a legkisebb?
13. Két prímszám különbsége 100. A tízes számrendszerbeli alakjukat egymás után írva egy újabb prímszámot kapunk. Melyek ezek a számok?
14. Miért nem négyzetszám a $10^{100}+10^{50}+1$?
15. Lehet-e két egymást követő egész szám szorzata $2(6^n+1)$?
16. Oldjuk meg az x^2-y^2=100 egyenletet a természetes számok halmazán!
17. Oldjuk meg az xy+3x-5y+3=0 egyenletet az egész számok halmazán!